

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая статистика
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2023

Аннотация

В данном курсе математическая статистика рассматривается как научная дисциплина, изучающая теоретические основы и методы извлечения и обработки эмпирических данных о массовых явлениях, представляемых в виде стохастических моделей. К задачам математической статистики относят также построение и исследование процедур принятия решений в условиях «стохастической неопределенности».

Курс содержит начальные сведения из математической статистики, используемые и дополняемые в дальнейшем. Рассматриваются классические вероятностные модели принятия решений о классах наблюдаемых объектов по значениям их признаков (модели классификации или выбора гипотез); при этом предполагается, что распределения признака для каждого класса объектов известны точно или с точностью до типа. Обсуждаются критерии согласия как инструмент проверки достоверности гипотез и задачи оценивания распределений (в частности, задачи т.н. параметрического оценивания).

Отдельно обсуждаются методы непараметрического оценивания распределений, предъявляющие к априорным сведениям об их свойствах гораздо меньшие требования. Курс также содержит основные сведения о регрессионном анализе, служащем для выявления и оценки вероятностных связей между изучаемыми случайными величинами.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование у студентов знаний и навыков работы с понятиями концепциями, методами математической статистики.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области математической статистики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области математической статистики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области математической статистики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия математической статистики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла математической статистики;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач математической статистики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить решения задач математической статистики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области математической статистики в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач математической статистики (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов математической статистики;
- предметным языком математической статистики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Стандартные распределения в статистическом анализе данных.	4	2		5
2	Точечное оценивание параметра закона распределения.	5	7		5
3	Интервальное оценивание параметра закона распределения.	2	3		5
4	Метод наименьших квадратов.	3	2		5
5	Задачи непараметрического оценивания.	3	2		5
6	Статистические критерии согласия.	2	3		5
7	Критерий Неймана-Пирсона.	3	3		5
8	Критерий минимума среднего риска (Байеса).	2	4		5
9	Минимаксный критерий и его связь с критерием Байеса. Связь критериев Неймана-Пирсона и Байеса.	2	2		3
10	Последовательный критерий отношения вероятностей (критерий Вальда).	4	2		2
Итого часов		30	30		45

Подготовка к экзамену	30 час.
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Стандартные распределения в статистическом анализе данных.

Распределение хи-квадрат (Пирсона). Случайная величина хи-квадрат как сумма квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин. Распределения Фишера-Снедекора и Стьюдента. распределение квадратичных форм от выборки из нормального распределения, условие независимости линейных и квадратичных форм.

2. Точечное оценивание параметра закона распределения.

Состоятельность, несмещенность (асимптотическая несмещенность) и оптимальность точечной оценки. Неравенство Рао-Крамера (скалярный и векторный случай). Эффективность (асимптотическая эффективность) точечной оценки. Достаточность статистики относительно параметра, критерий факторизации, теорема Блекуэла-Рао, полные достаточные статистики. Теорема об оптимальности полных достаточных статистик. Метод моментов. Функция правдоподобия. Метод наибольшего правдоподобия и свойства получаемой оценки.

3. Интервальное оценивание параметра закона распределения.

Доверительный интервал. Свойства статистик, используемых для интервального оценивания. Построение доверительных интервалов, параметров нормального распределения. Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий и равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин с использованием доверительных интервалов.

4. Метод наименьших квадратов.

Точечное оценивание векторного параметра. Свойства оценки метода наименьших квадратов, теорема Гаусса-Маркова. Нормальная регрессия. Интервальное оценивание по методу наименьших квадратов. Оптимальность оценки метода наименьших квадратов в случае нормальной регрессии.

5. Задачи непараметрического оценивания.

Порядковые статистики и их законы распределения. Доли и блоки выборки. Распределение Пуассона-Дирихле. Статистическая эквивалентность блоков выборки. Оценивание многомерной плотности распределения случайного вектора в произвольной точке.

6. Статистические критерии согласия.

Статистическая гипотеза, критическая область гипотезы, уровень значимости. Эмпирическая функция распределения. Свойства критериев согласия Колмогорова и Пирсона (хи-квадрат). Критерии согласия о независимости случайных величин, однородности выборок, простоты выборки.

7. Критерий Неймана-Пирсона.

Ошибки первого и второго рода, мощность статистического критерия. Наиболее мощный и равномерно наиболее мощный статистический критерий. Функция отношения правдоподобия. Лемма Нейман-Пирсона о построении решающего правила. Рандомизированное решающее правило.

8. Критерий минимума среднего риска (Байеса).

Функция штрафа, функция риска, средний риск. Решающее правило в случае двух простых гипотез. Критерий максимума апостериорной вероятности.

9. Минимаксный критерий и его связь с критерием Байеса. Связь критериев Неймана-Пирсона и Байеса.

Минимаксная процедура для случая неизвестного закона распределения случайного параметра. Связь критерия Байеса с критерием Неймана-Пирсона, минимаксным критерием.

10. Последовательный критерий отношения вероятностей (критерий Вальда).

Построение последовательной процедуры выбора при двух простых гипотезах. Вид решающего правила на произвольном шаге процедуры и его интерпретация. Теорема о завершении процедуры за конечное число шагов с вероятностью единица. Выбор параметров решающего правила при заданных величинах вероятностей ошибок первого и второго рода.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз ; Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МЗ Пресс, 2004, 2005 .— 160 с.
2. Наглядная математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. Б. Лагутин .— 2-е изд., испр. — М. : Бином. Лаб. знаний, 2009 .— 472 с.
3. Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков .— [3-е изд., испр.] .— М. : Физматлит, 2007 .— 704 с.
4. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.

Дополнительная литература

1. Методы обработки экспериментальных данных [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. Л. Косарев ; М-во образов. РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2003 .— 256 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс математическая статистика, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	<u>3</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент
А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент
О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия математической статистики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла математической статистики;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач математической статистики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить решения задач математической статистики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области математической статистики в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач математической статистики (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов математической статистики;
- предметным языком математической статистики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример задания

Задания по курсу формируются, в основном, из задач учебно-методического пособия «Математическая статистика» / С.А. Гуз, О.Г. Горбачёв, А.В. Гасников, Е.О. Черноусова. – М.: МФТИ, 2011.

Примеры задач:

1. Пусть $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, получаемая по простой выборке случайной величины X , обладающей функцией распределения $F(x)$. Оценить при больших n вероятность события (для заданного t и при $0 < F(x^*) < 1$).
 2. Пусть X – случайная величина с заданной функцией распределения $F(x)$. Найти совместную функцию распределения порядковых статистик $X(r)$ и $X(s)$ ($1 \leq r < s \leq n$, n – объем выборки).
 3. Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Найти совместное распределение минимального $X(1)$ и максимального $X(n)$ элементов ее простой выборки. Вычислить их математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции.
 4. Предполагается выполнить $n + 1$ независимых измерений случайной величины X , имеющей непрерывную функцию распределения $F(x)$. Найти: а) априорную вероятность того, что значение X_{n+1} , полученное в $(n + 1)$ -ом измерении, окажется больше, чем k -е по величине значение X , полученное в предшествующих n измерениях; б) априорную вероятность того, что значение X_{n+1} окажется в k -ом блоке выборки, т.е. вероятность Зависит ли она от номера блока?
 5. Пусть – простая выборка случайной величины, имеющей непрерывную функцию распределения $F(x)$, а – ее доли ($W_i = F(x(i)) - F(x(i-1))$). Найти распределение вероятностей суммы (суммы «четных» долей).
 6. Пусть числа такие, что величина достигает минимума при условии Доказать, что являются корнями уравнения для некоторого
 7. При бросаниях монеты получено выпадений "герба" и выпадений "решетки". Согласуются ли результаты с гипотезой о "симметричности" монеты при уровне значимости $= 0,05$?
 8. При 72 бросаниях игральной кости грани "1", "2", "3", "4", "5", "6" выпали 9, 20, 14, 8, 11, 10 раз соответственно. Можно ли считать игральную кость "симметричной" при уровне значимости $= 0,01$?
 9. Цифры 0, 1, 2, ..., 9 среди 800 первых десятичных знаков числа π появляются 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить гипотезу о согласии данных с законом равномерного распределения.
 10. При эпидемии гриппа из 200 контролируемых людей однократное заболевание наблюдалось у 181 человека, а дважды болели гриппом 9 человек. Правдоподобна ли гипотеза о том, что в течение эпидемии гриппа число заболеваний отдельного человека представляет собой случайную величину, подчиняющуюся биномиальному распределению с числом испытаний $n = 2$?
 11. Произведено измерение размеров деталей в двух партиях деталей по 100 деталей в каждой партии. В первой партии оказалось 25 деталей с заниженным размером, 50 деталей с точным размером, 25 деталей с завышенным размером, а во второй партии аналогичные числа оказались равны 52, 41, 7 соответственно. Проверить гипотезу о независимости номера партии деталей и размера детали.
 12. При снятии показаний измерительного прибора десятые доли деления шкалы прибора оцениваются "на глаз" наблюдателем. Количества цифр 0, 1, 2, ..., 9, записанных наблюдателем в качестве десятых долей при 100 независимых измерениях, равны 5, 8, 6, 12, 14, 18, 11, 6, 13, 7 соответственно. Проверить гипотезы о согласии данных с законом равномерного распределения и с законом нормального распределения. Для ответа на вопрос можно сравнить значения для обеих гипотез.
- Комментарии: Пусть- критическая область для критерия с уровнем значимости. Используемая статистика критерия.
13. Пусть T_n – состоятельная оценка для параметра q , а $j(x)$ – непрерывная функция. Доказать, что $j(T_n)$ – состоятельная оценка для $j(q)$.
 14. Пусть – простая выборка из генеральной совокупности (X, Y) . Показать, что величина является несмещенной и состоятельной оценкой корреляционного момента
 15. Используя таблицу случайных чисел, получить реализацию выборки из равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$ генеральной совокупности X (значения взять с двумя десятичными знаками, $n = 50$). Найти:
 - а) вариационный ряд
 - б) эмпирическую функцию распределения (построить ее график и график теоретической функции распределения);
 - в) (сравнить с MX);

г) (сравнить с DX).

Используя критерий , проверить гипотезу о соответствии полученной реализации выборки равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$ при уровне значимости $= 0,05$.

16. Используя таблицу случайных чисел, получить реализацию выборки из нормально распределенной, генеральной совокупности $X: X \sim N(1/2, 1)$ (значения взять с двумя десятичными знаками, $n = 50$). Найти вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, вычислить (см. п.п. в, г задачи № 15). Используя критерий , проверить гипотезу о соответствии полученной реализации выборки нормальному распределению (при неизвестных математическом ожидании и дисперсией) при уровне значимости $= 0,05$.

17. Пусть где неизвестны. Используя метод моментов, построить оценку параметра m по результатам измерений .

18. Построить состоятельные оценки параметров m и p по результатам измерения k независимых случайных величин, каждая из которых с вероятностью p подчиняется распределению , а с вероятностью $1-p$ – распределению где (рекомендуется воспользоваться методом моментов).

19. При измерении длины стержня, истинная длина которого равна (и неизвестна), ошибка измерения имеет распределение , где – известное число. Найти оценку наибольшего правдоподобия для параметра l , построенную на основании независимых измерений длины стержня.

20. Найти оценки наибольшего правдоподобия и эффективные оценки (если они существуют):

- а) параметра в пуассоновском распределении;
- б) параметра в показательном распределении;
- в) параметра в биномиальном распределении с n испытаниями.

Являются ли полученные оценки несмещенными, состоятельными?

21. Для того, чтобы узнать, сколько рыб в озере, отлавливают 500 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. Через некоторое время производится повторный отлов рыбы и среди 70 пойманных рыб оказываются 3 меченые рыбы. Оценить число рыб в озере.

22. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке , где число a неизвестно. Для оценивания параметра a по простой выборке генеральной совокупности X предлагаются две статистики:

Являются ли они состоятельными и несмещенными? Какую из двух статистик использовать более целесообразно?

23. Являются ли достаточными следующие статистики: а) выборочное среднее относительно параметра распределения Пуассона; б) частота "успехов" относительно параметра p биномиального распределения; в) величина, обратная выборочному среднему: относительно параметра показательного распределения; г) выборочное среднее относительно параметра нормального распределения (при известном параметре , при неизвестном параметре); д) выборочная дисперсия относительно параметра нормального распределения (при известном параметре , при неизвестном параметре

24. Пусть – простая выборка случайной величины X с равномерным распределением на отрезке . Доказать, что порядковая статистика $X(n)$ – полная достаточная статистика для q и – оптимальная несмещенная оценка q .

25. Пусть – простая выборка случайной величины X с равномерным распределением на отрезке . Найти достаточную статистику:

- а) относительно параметра ,
- б) относительно параметра ,
- в) относительно вектора .

26. Пусть – простая выборка случайной величины X с равномерным распределением на отрезке . Доказать достаточность и полноту статистики $T = (X(1), X(n))$ для векторного параметра $q = (q_1, q_2)$. Найти оптимальные оценки для q_1 и q_2 .

27. Пусть X_1, \dots, X_n – простая выборка случайной величины X , имеющей распределение Бернулли с параметром p . Доказать, что статистика – полная достаточная статистика относительно p .

28. Испытывают n приборов. Считается, что время службы одного прибора до отказа – это экспоненциально распределенная случайная величина с параметром q . Найти оценку максимального правдоподобия для параметра q , если а) испытания проводят до отказа всех приборов, б) если испытания проводят до момента k -го отказа ($k < n$). Проверить достаточность и несмещенность полученных статистик (оценок).

29. Пусть – простая выборка из равномерного на распределения. Найти достаточную статистику минимальной размерности.
30. Сталеплавильный завод изготавливает сталь, которая должна содержать 40% ванадия. Контроль содержания ванадия ведется на уровне значимости Методика контроля дает нормальное распределение результатов без систематической ошибки и со среднеквадратическим отклонением 2%. Контрольный анализ конкретной партии стали дал для содержания ванадия 36,4%. Следует ли на основании полученного результата забраковать данную партию стали?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень теоретических контрольных вопросов для сдачи экзамена:

1. Стандартные распределения в статистическом анализе данных. Распределение хи-квадрат (Пирсона). Случайная величина хи-квадрат как сумма квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин. Распределения Фишера–Снедекора и Стьюдента. Распределение Дирихле и Бета-распределение.
2. Точечное оценивание параметра закона распределения. Состоятельность, несмещенность (асимптотическая несмещенность) и оптимальность точечной оценки. Неравенство Рао–Крамера (скалярный и векторный случай). Эффективность (асимптотическая эффективность) точечной оценки.
3. Достаточность статистики относительно параметра, критерий факторизации. Теорема Блекуэла–Рао о возможности улучшения оценок при наличии достаточных статистик.
4. Полные достаточные статистики. Теорема об оптимальности полных достаточных статистик.
5. Метод моментов. Функция правдоподобия. Метод наибольшего правдоподобия и свойства получаемой оценки. Теорема о состоятельности, асимптотической несмещенности, нормальности и эффективности оценки наибольшего правдоподобия.
6. Интервальное оценивание параметра закона распределения, доверительный интервал. Свойства статистик, используемых для интервального оценивания. Построение доверительных интервалов параметров нормального распределения. Интервальное оценивание при больших выборках. Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий и равенстве дисперсий двух нормальных случайных величин с использованием доверительных интервалов.
7. Метод наименьших квадратов. Точечное оценивание векторного параметра. Система нормальных уравнений. Свойства оценки метода наименьших квадратов, теорема Гаусса–Маркова. Интервальное оценивание по методу наименьших квадратов. Нормальная регрессия. Теорема об оптимальности оценки метода наименьших квадратов в случае нормальной регрессии.
8. Эмпирическая функция распределения. Статистическая гипотеза, выборка, критическая область гипотезы, уровень значимости. Теоремы о свойствах критериев согласия Колмогорова и Пирсона (хи-квадрат). Теорема Крамера (параметрический хи-квадрат). Применение критериев для проверки согласия результатов опыта с теоретическими гипотезами о виде функции распределения, об однородности выборок, о независимости случайных величин. Использование статистических таблиц.
9. Порядковые статистики и их законы распределения. Доли и блоки выборки. Статистическая эквивалентность блоков выборки. Распределение Пуассона–Дирихле. Задачи непараметрического оценивания.
10. Выбор статистических гипотез. Простые и сложные статистические гипотезы. Статистическое решение и решающее правило. Рандомизированные решающие правила. Ошибки первого и второго рода, мощность статистического критерия. Наиболее мощный и равномерно наиболее мощный критерий.
11. Критерий Неймана–Пирсона для двух простых гипотез. Решающее правило, оптимальное по критерию Неймана–Пирсона. Функция отношения правдоподобия. Лемма Неймана–Пирсона о построении решающего правила.
12. Критерий максимума апостериорной вероятности.

13. Критерий минимума среднего риска (Байеса) в случае простых гипотез. Функция штрафа, функция риска, средний риск. Решающее правило в случае двух простых гипотез, в случае произвольного конечного числа простых гипотез.

14. Критерий Байеса в случае сложных гипотез. Решающее правило при известной функции распределения случайного параметра. Минимаксная процедура для случая неизвестного закона распределения случайного параметра.

15. Связь критерия Байеса с критерием максимума апостериорной вероятности, минимаксным критерием, критерием Неймана–Пирсона.

16. Последовательный критерий отношения вероятностей (критерий Вальда) и построение последовательной процедуры выбора при двух простых гипотезах. Теорема об оптимальности критерия отношения правдоподобия. Вид решающего правила на произвольном шаге процедуры и его интерпретация. Теорема о завершении процедуры за конечное число шагов с вероятностью единица. Выбор параметров решающего правила при заданных величинах вероятностей ошибок первого и второго рода.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Доли и блоки выборки. Статистическая эквивалентность блоков выборки.
2. Решающее правило при известной функции распределения случайного параметра.

Билет 2.

1. Построение доверительных интервалов параметров нормального распределения.
2. Теорема о состоятельности, асимптотической несмещенности, нормальности и эффективности оценки наибольшего правдоподобия.

Пример семестровой контрольной работы:

1. По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского учёта равен 87, 5 тыс. руб. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что среднее арифметическое значение выборки тыс. рублей при выборочном среднем квадратичном отклонении $S=35$ тыс. рублей. Можно ли при уровне значимости считать правильным объявленный средний размер дебиторского счёта? Выборку считать простой и из нормального распределения.
2. Среди 2020 семей, имеющих двух детей, 527 семей, в которых два мальчика, и 476 – две девочки (в остальных семьях дети разного пола). Можно ли с уровнем значимости считать, что вероятность рождения мальчика постоянна (не зависит от того, первым он рождается или вторым)?
3. По выборке объёма 1 проверяется гипотеза о том, что распределено равномерно на отрезке, против альтернативы о том, что имеет распределение с плотностью. Построить решающее правило Неймана-Пирсона при ошибке первого рода.

Критерии оценивания

10 оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

9 оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

8 оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

хорошо 7 оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

6 оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

5 оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

удовлетворительно 4 оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

3 оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

неудовлетворительно 2 оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

1 оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также калькулятором (при необходимости) и таблицей квантилей стандартных распределений.

Экзамен проводится в устной форме. Успешная сдача заданий является необходимым условием допуска к экзамену. В противном случае, прежде чем приступить к сдаче экзамена, студент получает дополнительные задачи по теме несданного задания.